

Homotopy pushout——ホモトピー論の楽しみについて

@koizumi_fifty

2013年9月22日

ツイッターではすっかりメジャーになってしまった観のある代数トポロジーですが、その実態は
いまだ茫漠とした闇に覆われており、真なる魅力が大勢に伝わっているとはとてもいえない状況で
ありましょう。正直なところ、「騒がれてはいるようだけれども、一体何が面白いの？」という方が
大半なのではないでしょうか。

そういった訳もあって、今回は闇に隠れた代数トポロジーの魅力の一端、すなわち“変幻自在なる
代数トポロジー”という側面を語りたいと思います。この“変幻自在”なる形容の意味するところは
ちょっと一言では表し切れないものです。今回は homotopy pushout, そして homotopy pullback
というものを通じてこの変幻自在の面白さをお伝えする予定です。

具体的な内容としましては、まずは一般の圏において pushout を定義し、これが位相空間の圏で
どうなっているかを見ます。続いて位相空間 X, Y_1, Y_2 と連続写像 $f: X \rightarrow Y_1, g: X \rightarrow Y_2$ に対し、
複写像柱 $Z_{f,g}$ なるものを定義して、これが pushout に似た性質をもち、さらにホモトピー論的には
pushout よりも便利なものであるということを述べます。こうした理由により、複写像柱 $Z_{f,g}$ のこ
とを homotopy pushout と呼びます—— などと書いてしまうと怒られるかもしれませんが、とに
かく表題にある“homotopy pushout”とはこの $Z_{f,g}$ を指しています。

以上 homotopy pushout については証明もそれなりに付けつつお話しするつもりですが、homo-
topy pushout だけではあまり面白い話ができそうにないので、おまけとしてその双対的な概念で
ある homotopy pullback と、その応用である“killing method”について、基本的には証明なしでお
話ししたいと考えております。

メインである homotopy pushout の部分については、圏論と位相空間論のごく初歩的な知識のみ
を仮定します(圏の定義、ホモトピーの定義、位相空間の非交和や商位相といった程度のことを理解
していれば十分かと思えます)。おまけの部分に関しましては、残った時間にもよりますが、ホモト
ピー群や CW 複体、ファイバー空間(あるいはファイバー束)といったものにある程度馴染んでい
ないと理解し辛い話になるかもしれません。

参考文献

- [1] 西田吾郎, ホモトピー論, 共立講座・現代の数学 (共立出版)
- [2] S. マックレーン, 圏論の基礎, 丸善出版