ルービックキューブのパターン数を求めるために群論を用いる

福本佳泰*

大阪大学，2013 年 9 月

ルービックキューブのパターン数が全部で何通りであるかを求めたい。

『色が全部で６色あって、それぞれ９マスずつだから……』という考え方では、少なくとも求まらない。

まず「ルービックキューブのパターン全体」を「ルービックキューブに施せる操作全体」と考え直す。すると、操作全体の集合には「群」と呼ばれる構造が自然に入る。

数学においては、単に「集合」を考えるのではなく、「集合」と「その構造」をセットにして考えることがほとんどである。今の場合、「群」とは一言で言うと「かけ算と逆数を考えられる集合」のことである。つまり、「集合」と「かけ算」をセットにして扱う概念である。詳しい定義は講演中に話すが、演算は「かけ算」１種類だけで良いし、実際の数のかけ算である必要も無い。例えば、……

(1) 正の実数全体 $\mathbb{R}_{>0}$ は群になる。「かけ算」は通常の数のかけ算である。

(2) 正の有理数全体 $\mathbb{Q}_{>0}$ は群になる。「かけ算」は通常の数のかけ算である。

(3) 正の整数全体 $\mathbb{Z}_{>0}$ は群にはならない。1 以外の整数に対しては、整数の範囲で逆数を考えられないからである。

(4)$\{\pm 1\}$ は群になる。「かけ算」は通常の数のかけ算である。

(5) 自然数全体 $\mathbb{Z}$ は、「通常の意味でのたし算」を、今だけ強引に「かけ算」と呼ぶことにすれば、群になる。このとき、a に対しては $-a$ が「逆数」の役目を持つ。

(6) 100 本の縦線からなるあみだくじ全体の集合を考える。（ただし、結果が同じになるあみだくじは、すべて同一視する。）「２つのあみだくじ X と Y のかけ算」を、「X の真下に Y をつなぎ合わせたあみだくじ」と定めると、群になる。このとき「上下を反転させたあみだくじ」が「逆数」の役目を持つ。（つなぐと、「横線が 1 本も引かれていないあみだくじ」と同一になる。）

上の (6) は大切な例である。また、講演では次の事を頻繁に考える。

「群をひとつ固定する。どのような部分集合が、再び群になるか？」

実際には、このような部分集合の中でも更に $+\alpha$ で良い性質を持つ、「正規部分群」と呼ばれるものを探す。

ここまで、群についての紹介を書き続けたが、講演当日はほとんどがルービックキューブの話で、ルービックキューブで起きていることを群の単語を用いて表す、ということを繰り返す講演になる。家にルービックキューブがある人は、講演当日に持って来ていただけるとより楽しめると思う。（揃っている必要は無い。）

*fukumoto @ math．kyoto-u．ac．jp