meager set や null set を知ろう

田尻 翔平

大阪府立大学 理学系研究科 M1

注意

本資料は、”第 3 回関西すうがく徒のつどい”において、
田尻が口頭発表の補助として用いたスライドです。
今後の皆さんの勉強のヒントとしてお使いください。

これはあくまで、口頭発表の補助ですので、
当然のことながら、
本格的な勉強には、本格的な資料をお使いください。

今回のテーマは集合の"大小"

カントールの定理：「濃度の意味において、$\mathbb{N} < \mathbb{R}$」

集合同士の相対的な関係を見たい → 大きさでの比較

濃度の文脈では「可算」="小さい"

- { 51, 26, 31 } は小さい
- 自然数全体の集合は小さい
- 有理数全体の集合は小さい
- 開区間 (0.0000001 , 0.0000002) は小さくない

今回のテーマは集合の"大小"

カントールの定理：「濃度の意味において、$\mathbb{N} < \mathbb{R}$」

集合同士の相対的な関係を見たい → 大きさでの比較

濃度の文脈では「可算」="小さい"

- { 51, 26, 31 } は小さい
- 自然数全体の集合は小さい
- 有理数全体の集合は小さい
- 開区間 (0.0000001 , 0.0000002) は小さくない

今回のテーマは集合の"大小"

カントールの定理：「濃度の意味において、$\mathbb{N} < \mathbb{R}$」

集合同士の相対的な関係を見たい → 大きさでの比較

濃度の文脈では「可算」="小さい"

- { 51, 26, 31 } は小さい
- 自然数全体の集合は小さい
- 有理数全体の集合は小さい
- 開区間 (0.0000001 , 0.0000002) は小さくない

今回のテーマは集合の"大小"

カントールの定理：「濃度の意味において、$\mathbb{N} < \mathbb{R}$」

集合同士の相対的な関係を見たい → 大きさでの比較

濃度の文脈では「可算」="小さい"

- { 51, 26, 31 } は小さい
- 自然数全体の集合は小さい
- 有理数全体の集合は小さい
- 開区間 (0.00000001 , 0.00000002) は小さくない

今回のテーマは集合の”大小”

カントールの定理：「濃度の意味において、$\mathbb{N} < \mathbb{R}$」

集合同士の相対的な関係を見たい → 大きさでの比較

濃度の文脈では「可算」=”小さい”

- { 51, 26, 31 } は小さい
- 自然数全体の集合は小さい
- 有理数全体の集合は小さい
- 開区間 (0.00000001 , 0.00000002) は小さくない

二つの尺度

体積とか面積の意味での"小ささ"を考えるのは自然である

↓

null set

位相の概念を用いた"小ささ"を考える

↓

meager set

二つの尺度

体積とか面積の意味での"小ささ"を考えるのは自然である

↓

null set

位相の概念を用いた"小ささ"を考える

↓

meager set

二つの尺度

体積とか面積の意味での"小ささ"を考えるのは自然である

↓

null set

位相の概念を用いた"小ささ"を考える

↓

meager set

測度

体積や面積を一般化したい → そもそも体積や面積とは何か?

体積や面積が持つ主な性質

- 空集合は面積 0
- $A \subset B$ → 面積は $A \leq B$
- $A \cap B = 0$ → $A \cup B$ の面積は (A の面積)+(B の面積)

これぐらいのことに注意しておけば十分
厳密な定義はここではしない

測度

体積や面積を一般化したい → そもそも体積や面積とは何か?

体積や面積が持つ主な性質

- 空集合は面積 0
- $A \subset B$ → 面積は $A \leq B$
- $A \cap B = 0$ → $A \cup B$ の面積は (A の面積)+(B の面積)

これぐらいのことに注意しておけば十分
厳密な定義はここではしない

測度

体積や面積を一般化したい → そもそも体積や面積とは何か?

体積や面積が持つ主な性質

- 空集合は面積 0
- $A \subset B$ → 面積は $A \leq B$
- $A \cap B = 0$ → $A \cup B$ の面積は (A の面積)+(B の面積)

これぐらいのことに注意しておけば十分
厳密な定義はここではしない

測度

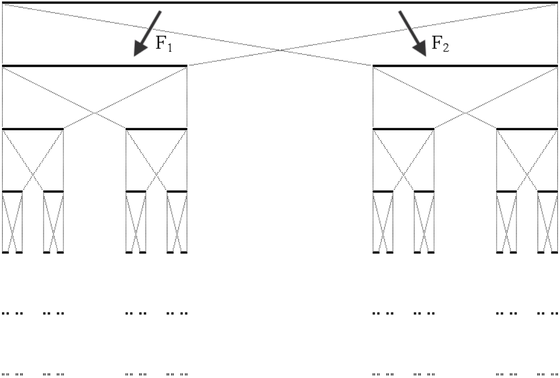
体積や面積を一般化したい → そもそも体積や面積とは何か?

体積や面積が持つ主な性質

- 空集合は面積 0
- $A \subset B$ → 面積は $A \leq B$
- $A \cap B = 0$ → $A \cup B$ の面積は (A の面積)+(B の面積)

これぐらいのことに注意しておけば十分
厳密な定義はここではしない

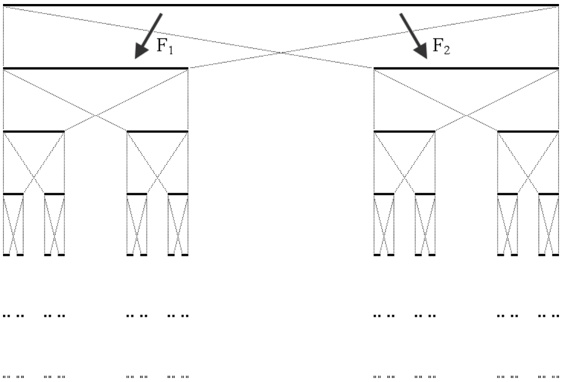
例：カントール集合



[1]

$\leftarrow C_1$
$\leftarrow C_2$
$\leftarrow C_3$
$\leftarrow C_4$
$\leftarrow C_5$
$\leftarrow C_6$
$\leftarrow C_7$

例：カントール集合



[1]

$\leftarrow C_1$

$\leftarrow C_2$

$\leftarrow C_3$

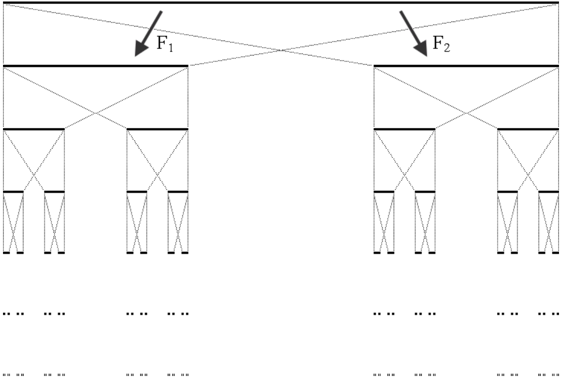
$\leftarrow C_4$

$\leftarrow C_5$

$\leftarrow C_6$

$\leftarrow C_7$

例：カントール集合



[1]

$\leftarrow C_1$

$\leftarrow C_2$

$\leftarrow C_3$

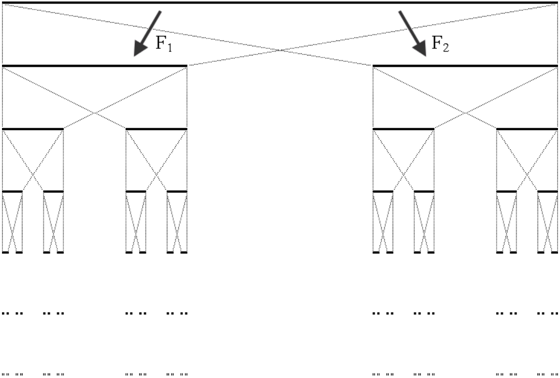
$\leftarrow C_4$

$\leftarrow C_5$

$\leftarrow C_6$

$\leftarrow C_7$

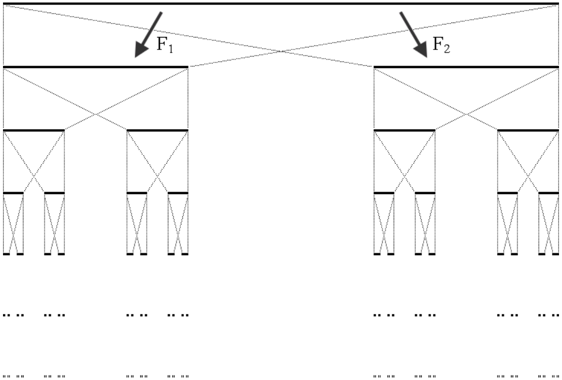
例：カントール集合



[1]

$\leftarrow C_1$
$\leftarrow C_2$
$\leftarrow C_3$
$\leftarrow C_4$
$\leftarrow C_5$
$\leftarrow C_6$
$\leftarrow C_7$

カントール集合の"長さ"



[1]

$\leftarrow 1$

$\leftarrow \frac{2}{3}$

$\leftarrow \frac{4}{9}$

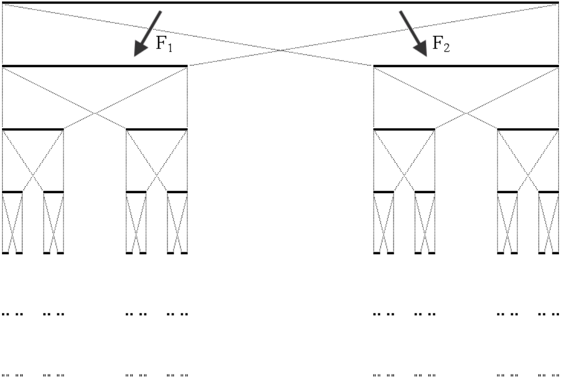
$\leftarrow \frac{8}{27}$

$\leftarrow \frac{16}{81}$

$\leftarrow \frac{32}{243}$

$\leftarrow \frac{64}{729}$

カントール集合の"長さ"



[1]

$\leftarrow 1$

$\leftarrow \frac{2}{3}$

$\leftarrow \frac{4}{9}$

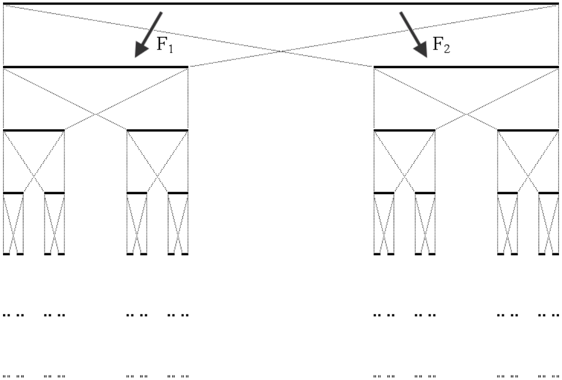
$\leftarrow \frac{8}{27}$

$\leftarrow \frac{16}{81}$

$\leftarrow \frac{32}{243}$

$\leftarrow \frac{64}{729}$

カントール集合の"長さ"



[1]

$\leftarrow 1$

$\leftarrow \frac{2}{3}$

$\leftarrow \frac{4}{9}$

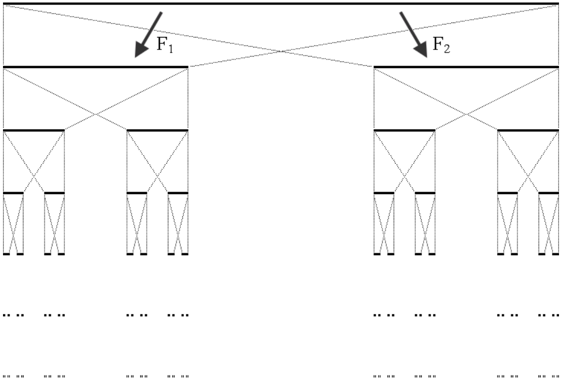
$\leftarrow \frac{8}{27}$

$\leftarrow \frac{16}{81}$

$\leftarrow \frac{32}{243}$

$\leftarrow \frac{64}{729}$

カントール集合の”長さ”



[1]

$\leftarrow 1$

$\leftarrow \frac{2}{3}$

$\leftarrow \frac{4}{9}$

$\leftarrow \frac{8}{27}$

$\leftarrow \frac{16}{81}$

$\leftarrow \frac{32}{243}$

$\leftarrow \frac{64}{729}$

null set

カントール集合は null set である.

null set とは

どんなに小さな正の数 ε を提示されても,
それより小さい測度 $\delta(<\varepsilon)$ を持つ集合 S を上手く選べば,
その S で覆えてしまう集合のこと.

null set の測度は 0

ただし, カントール集合は不可算集合.
↑
濃度の意味では小さくない

null set

カントール集合は null set である.

null set とは

どんなに小さな正の数 ε を提示されても,
それより小さい測度 $\delta(<\varepsilon)$ を持つ集合 S を上手く選べば,
その S で覆えてしまう集合のこと.

null set の測度は 0

ただし, カントール集合は不可算集合.
↑
濃度の意味では小さくない

null set

カントール集合は null set である.

null set とは

どんなに小さな正の数 ε を提示されても,
それより小さい測度 $\delta(<\varepsilon)$ を持つ集合 S を上手く選べば,
その S で覆えてしまう集合のこと.

null set の測度は 0

ただし, カントール集合は不可算集合.
↑
濃度の意味では小さくない

null set

カントール集合は null set である.

null set とは

どんなに小さな正の数 ε を提示されても,
それより小さい測度 $\delta(<\varepsilon)$ を持つ集合 S を上手く選べば,
その S で覆えてしまう集合のこと.

null set の測度は 0

ただし, カントール集合は不可算集合.
↑
濃度の意味では小さくない

"近さ" で "大きさ" を見る

位相は"近さ"のための概念 ← "小ささ"は測れる?

まずは"大きさ"を考えよう → "稠密性"に着目

稠密性

対象空間内で集合 S が稠密とは,
空間内のどんな点も S の点列の極限にあること.
空間の全ての点に,「点列アーム」で手が届くこと.

$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の中で稠密

"近さ" で "大きさ" を見る

位相は"近さ"のための概念 $\leftarrow$ "小ささ"は測れる?

まずは"大きさ"を考えよう $\rightarrow$ "稠密性"に着目

稠密性

対象空間内で集合 S が稠密とは,
空間内のどんな点も S の点列の極限にあること.
空間の全ての点に,「点列アーム」で手が届くこと.

$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の中で稠密

"近さ" で "大きさ" を見る

位相は"近さ"のための概念 ← "小ささ"は測れる?

まずは"大きさ"を考えよう → "稠密性"に着目

稠密性

対象空間内で集合 S が稠密とは,
空間内のどんな点も S の点列の極限にあること.
空間の全ての点に,「点列アーム」で手が届くこと.

$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の中で稠密

"近さ" で "大きさ" を見る

位相は"近さ"のための概念 ← "小ささ"は測れる?

まずは"大きさ"を考えよう → "稠密性"に着目

稠密性

対象空間内で集合 S が稠密とは,
空間内のどんな点も S の点列の極限にあること.
空間の全ての点に,「点列アーム」で手が届くこと.

$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の中で稠密

closed nowhere dense set

closed nowhere dense set とは

内点が無い閉集合のこと.

つまり

点列アームを伸ばしても新しい点が得られないのに,
中身を取ろうとするとはみ出る,"側" だけの集合.

例：$\mathbb{R}^2$ における円周, $\mathbb{R}^3$ における円盤

now-here じゃなくて no-where ってことにも注意しましょう

closed nowhere dense set

closed nowhere dense set とは

内点が無い閉集合のこと.

つまり

点列アームを伸ばしても新しい点が得られないのに,
中身を取ろうとするとはみ出る,"側"だけの集合.

例：$\mathbb{R}^2$ における円周, $\mathbb{R}^3$ における円盤

now-here じゃなくて no-where ってことにも注意しましょう

closed nowhere dense set

closed nowhere dense set とは

内点が無い閉集合のこと.

つまり

点列アームを伸ばしても新しい点が得られないのに,
中身を取ろうとするとはみ出る,"側" だけの集合.

例：$\mathbb{R}^2$ における円周, $\mathbb{R}^3$ における円盤

now-here じゃなくて no-where ってことにも注意しましょう

closed nowhere dense set

closed nowhere dense set とは

内点が無い閉集合のこと.

つまり

点列アームを伸ばしても新しい点が得られないのに,
中身を取ろうとするとはみ出る,"側"だけの集合.

例：$\mathbb{R}^2$ における円周, $\mathbb{R}^3$ における円盤

now-here じゃなくて no-where ってことにも注意しましょう

meager set

closed nowhere dense set は確かに" 小さい" が,
諸事情によりそれらの可算和も" 小さい" と見なす.

meager set とは

可算個の closed nowhere dense set で覆える集合のこと.

meager set

closed nowhere dense set は確かに"小さい"が,
諸事情によりそれらの可算和も"小さい"と見なす.

meager set とは

可算個の closed nowhere dense set で覆える集合のこと.

例：カントール集合再び

実は, カントール集合は meager set でもある.
(というより, そもそも closed nowhere dense.)

閉集合 ← カントール集合は「閉集合達の交叉」

内点が無い ← どんなに小さな開区間にも,
"三進表現に 1 が必要な実数" がある.
(この実数がカントール集合から, はみ出る.)

例：カントール集合再び

実は, カントール集合は meager set でもある.
(というより, そもそも closed nowhere dense.)

閉集合 ← カントール集合は「閉集合達の交叉」

内点が無い ← どんなに小さな開区間にも,
"三進表現に 1 が必要な実数" がある.
(この実数がカントール集合から, はみ出る.)

例：カントール集合再び

実は, カントール集合は meager set でもある.
(というより, そもそも closed nowhere dense.)

閉集合 ← カントール集合は「閉集合達の交叉」

内点が無い ← どんなに小さな開区間にも,
"三進表現に 1 が必要な実数" がある.
(この実数がカントール集合から, はみ出る.)

ベールのカテゴリー定理

”ベールのカテゴリー定理” を,
あまり一般的ではない形で表すと……

ベールのカテゴリー定理

完備距離空間において, meager set は内点を持たない.

ちなみに

「meager set は内点を持たない」
という性質を満たす空間を**ベール空間**と呼ぶ.

ベールのカテゴリー定理

"ベールのカテゴリー定理" を,
あまり一般的ではない形で表すと……

ベールのカテゴリー定理

完備距離空間において, meager set は内点を持たない.

ちなみに

「meager set は内点を持たない」
という性質を満たす空間をベール空間と呼ぶ.

ベールのカテゴリー定理

"ベールのカテゴリー定理" を,
あまり一般的ではない形で表すと……

ベールのカテゴリー定理

完備距離空間において, meager set は内点を持たない.

ちなみに

「meager set は内点を持たない」
という性質を満たす空間をベール空間と呼ぶ.

null set, meager set の使用例

null set, meager set 共に "無視可能な集合" と呼ばれる.
その特性などを生かした活躍 ↓

null

- 解析：almost everywhere などの概念
- 集合論：測度代数, ランダム強制

meager

- 解析：バナッハ空間の解析
- 集合論：コーエン強制

null set, meager set の使用例

null set, meager set 共に "無視可能な集合" と呼ばれる.
その特性などを生かした活躍 ↓

null

- 解析：almost everywhere などの概念
- 集合論：測度代数, ランダム強制

meager

- 解析：バナッハ空間の解析
- 集合論：コーエン強制

null set, meager set の使用例

null set, meager set 共に "無視可能な集合" と呼ばれる.
その特性などを生かした活躍 ↓

null

- 解析：almost everywhere などの概念
- 集合論：測度代数, ランダム強制

meager

- 解析：バナッハ空間の解析
- 集合論：コーエン強制

σ-イデアル

ZFC の定理，「可算集合の可算和は可算集合である」は有名.

実は……

"小ささ" は可算和に対して robust

null set の可算和は null set である.
meager set の可算和は meager set である.

ベール空間の"null set 全体","meager set 全体"は
それぞれ σ-イデアルを成す.

σ-イデアル

ZFC の定理, 「可算集合の可算和は可算集合である」は有名.

実は……

"小ささ" は可算和に対して robust

null set の可算和は null set である.
meager set の可算和は meager set である.

ベール空間の "null set 全体", "meager set 全体" は
それぞれ σ-イデアルを成す.

σ-イデアル

ZFC の定理, 「可算集合の可算和は可算集合である」は有名.

実は……

”小ささ”は可算和に対して robust

null set の可算和は null set である.
meager set の可算和は meager set である.

ベール空間の”null set 全体”,”meager set 全体”は
それぞれ σ-イデアルを成す.

σ-イデアル

そもそもイデアルとは? ← 一般的な"小ささ"の指標

イデアル

空間 X の部分集合の族 $\mathcal{I}$ がイデアルであるとは,

- $\emptyset \in \mathcal{I} \wedge X \notin \mathcal{I}$
- $A \subset B \wedge B \in \mathcal{I} \quad \longrightarrow \quad A \in \mathcal{I}$
- $A \in \mathcal{I} \wedge B \in \mathcal{I} \quad \longrightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{I}$ 　が成り立つこと.

最後の条件「"有限和"について閉じている」を
"可算和"に書き換えて得られる概念が σ-イデアル.

σ-イデアル

そもそもイデアルとは? $\leftarrow$ 一般的な"小ささ"の指標

イデアル

空間 X の部分集合の族 $\mathcal{I}$ がイデアルであるとは,

- $\emptyset \in \mathcal{I} \land X \notin \mathcal{I}$
- $A \subset B \land B \in \mathcal{I} \quad \longrightarrow \quad A \in \mathcal{I}$
- $A \in \mathcal{I} \land B \in \mathcal{I} \quad \longrightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{I}$ が成り立つこと.

最後の条件「"有限和"について閉じている」を
"可算和"に書き換えて得られる概念が σ-イデアル.

σ-イデアル

そもそもイデアルとは? ← 一般的な"小ささ"の指標

イデアル

空間 X の部分集合の族 $\mathcal{I}$ がイデアルであるとは,

- $\emptyset \in \mathcal{I} \land X \notin \mathcal{I}$
- $A \subset B \land B \in \mathcal{I} \quad \longrightarrow \quad A \in \mathcal{I}$
- $A \in \mathcal{I} \land B \in \mathcal{I} \quad \longrightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{I}$ が成り立つこと.

最後の条件「"有限和"について閉じている」を
"可算和"に書き換えて得られる概念が σ-イデアル.

くせもの

実数直線 $\mathbb{R}$ 上において, 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は
可算集合で, すなわち null だし meager でもある.
どう見ても"小さい"が、
$\mathbb{Q}$ はどんな実数も近似しきっている. (稠密性)

一方, カントール集合は非可算集合であるのに,
null かつ meager な閉集合.

くせもの

実数直線 $\mathbb{R}$ 上において, 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は
可算集合で, すなわち null だし meager でもある.
どう見ても"小さい"が、
$\mathbb{Q}$ はどんな実数も近似しきっている. (稠密性)

一方, カントール集合は非可算集合であるのに,
null かつ meager な閉集合.

$\mathbb{R}$ の被覆, null と meager の双対性

なんと,

定理

$\mathbb{R}$ は二つの"小さい"集合で被覆できる...[2]

$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ と番号付けしておく.

$$N = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (q_j - 2^{-n-j}, q_j + 2^{-n-j})$$ とすると,

N は null set であり, N の補集合は meager set である.

$\mathbb{R}$ の被覆, null と meager の双対性

なんと,

定理

$\mathbb{R}$ は二つの"小さい"集合で被覆できる...[2]

$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ と番号付けしておく.

$$N = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (q_j - 2^{-n-j}, q_j + 2^{-n-j})$$ とすると,

N は null set であり, N の補集合は meager set である.

$\mathbb{R}$ の被覆, null と meager の双対性

なんと,

定理

$\mathbb{R}$ は二つの"小さい"集合で被覆できる...[2]

$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ と番号付けしておく.

$$N = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (q_j - 2^{-n-j}, q_j + 2^{-n-j})$$ とすると,

N は null set であり, N の補集合は meager set である.

使った画像・資料

[1] http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AB%E3%83%B3%E3%83%88%E3%83%BC%E3%83%AB%E9%9B%86%E5%90%88
drawn by Complex01

[2] The Erdős-Sierpiński Duality Theorem. in http://imi.kyushu-u.ac.jp/~ssaito/eng/maths/notes.html