Coarse幾何入門

山元 不全

2013/3/16

目 次

概 要

距離構造は空間に入る幾何学的な構造の中でも特に強いものの一つである. それゆえ距離構造は非常に多くの情報を持っているが, 逆に適応範囲が狭いという欠点もある. その欠点を補う距離構造の拡張概念としてよく知られているものが一様構造である. 一様構造は距離の等質的な性質のうち局所的な構造を取り出したものだが, 今回紹介する coarse 構造は距離の一様な性質のうち大規模な構造を取り出して得られた.

例えば $\mathbb{Z}^n$ と $\mathbb{R}^n$ は局所的には全く異なる空間だが coarse の意味では同一視することができる. ではこの二つの空間からどのような共通の性質を取り出すことができるだろうか. 空間に対してもっと基本的な性質の一つに次元があるが, 位相次元については $\mathbb{Z}^n$ は 0 であり $\mathbb{R}^n$ は n となる. このような位相的には異なるが coarse の意味では等しい空間に同じ次元を定義するために考えだされた次元が漸近次元である. 漸近次元は $\mathbb{Z}^n$ も $\mathbb{R}^n$ も n となる.

coarse 構造は特に幾何学的群論において非常に重要なキーワードである. 今回の講演では位相群における coarse 幾何を中心に coarse 幾何の基本事項について解説して行く予定である.

1 導入

この節では距離と群についての基本的な事項について説明する.

1.1 距離空間

この項では擬等長について解説する.
まずは一般化された距離を導入しておく.

定義 1.1 (距離)**.**
集合 X から拡張実数 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \sqcup \{\pm\infty\}$ への写像 $d : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ が

$$\text{任意の } x, y \in X \text{ に対し, } d(x, y) \geq 0 \tag{非負値性}$$

$$\text{任意の } x \in X \text{ に対し, } d(x, x) = 0 \tag{反射性}$$

$$\text{任意の } x, y, z \in X \text{ に対し, } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \tag{三角不等式}$$

$$\text{任意の } x, y \in X \text{ に対し, } d(x, y) < \infty \tag{有限性}$$

$$\text{相異なる任意の } x, y \in X \text{ に対し, } d(x, y) > 0 \tag{分離性}$$

$$\text{任意の } x, y \in X \text{ に対し, } d(y, x) = d(x, y) \tag{対称性}$$

を満たすとき d を距離という.
有限性の条件を外したものを拡張距離, 分離性を外したものを擬距離, 対称性を外したものを準距離という.
距離の付随した空間を距離空間という.

以下距離空間に関する事柄は適時, 一般化された距離についても適用できる.

定義 1.2 (基本事項)**.**

- 距離空間 (X,d) の部分集合 A と正数 $\epsilon > 0$ に対し $\overline{B}_\epsilon(A) := \{x \in X | \exists a \in A, d(x,a) \leq \epsilon\}$ を A の ϵ-閉近傍 という. 同様に点 x と正数 $\epsilon > 0$ に対し $\overline{B}_\epsilon(x) := \overline{B}_\epsilon(x)$ を x の ϵ-閉球 という.
- 距離空間 (X,d) の部分集合 A について, ある点 x と正数 $\epsilon > 0$ が存在して $A \subseteq \overline{B}_\epsilon(x)$ となる時, A は d-有界又は単に有界だという.
- 距離空間 (X,d) の部分集合 A と正数 $\epsilon > 0$ について, $X = \overline{B}_\epsilon(A)$ となる時, A は X で ϵ-稠密だという.

1.2 擬等長

距離空間の等長同型は非常に硬い性質であり, 応用する上でその硬さが問題となることがある. そこで等長同型ではなく擬等長な関係を考えていきた. まずは写像の間に関係を入れる.

定義 1.3 (ϵ-close)**.**
集合 S から距離空間 (X,d) への写像 $f, g : S \to X$ と正数 $\epsilon > 0$ が

$$\sup\{d(f(a), g(a)) | a \in S\} \leq \epsilon$$

を満たすとき, ここでは f と g は ϵ-close であるという. 何らかの $\epsilon > 0$ に対し, ϵ-close になるとき, 単に close であるという.

距離空間の間の二つの写像が close であるとき二つの写像は粗い意味で同一視できる.

次に擬等長の基本となる写像を定義する.

定義 1.4 (擬 Lipschitz)**.**
距離空間 (X, d_X) から距離空間 (Y, d_Y) への写像 $f : X \to Y$ が

$$\exists K, L > 0, \forall a, b \in X, d_Y(f(a), f(b)) \leq K \cdot d_X(a,b) + L$$

を満たすとき, ここでは f が擬 Lipschitz[1] であるという.

[1] 通常擬 Lipschitz はより広義の性質を指す.

擬等長では距離空間を対象, 擬 Lipschitz 写像の close による同値類を射とするような圏を考えることになる. この圏では, 単射的 (monic) な射が擬等長埋め込みとなり全射的 (epic) な射は像が ϵ-稠密になる擬 Lipschitz 写像となり, 同型射は擬等長同型となる.

定義 1.5 (擬等長埋め込み)**.**
距離空間 (X, d_X) から距離空間 (Y, d_Y) への写像 $f : X \to Y$ が

$$\exists K, L > 0, \forall a, b \in X,\ K^{-1} \cdot d_X(a, b) - L \leq d_Y(f(a), f(b)) \leq K \cdot d_X(a, b) + L$$

を満たすとき, ここでは f を擬等長埋め込み [2] と呼ぶ.

定義 1.6 (擬等長同型)**.**
距離空間 (X, d_X) から距離空間 (Y, d_Y) への擬等長埋め込み $f : X \to Y$ について, ある正数 $\epsilon > 0$ があって, f の像 $f(X)$ が Y で ϵ-稠密のとき, ここでは f を擬等長同型 [3] と呼ぶ.

定理 1.7 (擬等長同型の特徴付け)**.**
擬 Lipschitz 写像 $f : X \to Y$ について以下が同値.

- f が擬等長同型
- ある擬 Lipschitz 写像 $g : X \to Y$ とある正数 $\epsilon > 0$ が存在して, $g \circ f$ が $\mathrm{id_X}$ と, $f \circ g$ が $\mathrm{id_Y}$ とそれぞれ ϵ-close になる.

このような圏を考える理由の一つは, ある種の対象に対し距離が擬等長を除いて自然に入るということがしばしば起こることにある.

1.3 群と距離

この項では, 群に対し, ある種の部分集合から入る距離について解説する.
まずはいくつか記号法と言葉を定義しておく.

表記 1.8.
群 G とその部分集合 $A, B \subseteq G$ が与えられたときその積 $A \cdot B$ を $A \cdot B := \{ab | a \in A, b \in B\}$ と, 冪乗 $A^n (n \in \mathbb{N})$ を帰納的に $A^0 := \{e\}$, $A^{n+1} := A \cdot A^n (n \geq 0)$ と定義する (ただし e は G の単位元).

[2] 単に擬等長写像ということも多い
[3] こちらを単に擬等長写像ということも多い

定義 1.9 (群の部分集合)**.**
群 G とその部分集合 $S \subseteq G$ が $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n$ を満たすとき S は G の生成系であるという.
群 G の部分集合 $S \subseteq G$ が $S^{-1} = S$(ただし $S^{-1} := \{g^{-1}|g \in S\}$) を満たすとき S は 対称であるという.

定義 1.10 (有限生成と compact 生成)**.**
群が有限な生成系を持つとき、その群は有限生成であるという。位相群が compact な生成系を持つとき、その位相群[4] は compact 生成であるという。

例 1.11.

- 加法群 $\mathbb{Z}^n$ は $\{\pm e_i|i = 0, \cdots, n-1\}$*(ただし* $e_i := (\underbrace{0, \cdots, 0}_{i}, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-i-1})$*)* を生成系に持つので有限生成.
- 加法群 $\mathbb{R}^n$ は $[0, 1]^n$ を生成系に持つので *compact* 生成.

いよいよ群に距離を入れる.

定義 1.12 (語距離)**.**
群 G と単位元を含む G の部分集合 S に対し, G 上の拡張準距離 $d_S : G \times G \to \overline{\mathbb{R}}$ を $d_S(x, y) := \inf\{n \in \mathbb{N}|x \in y \cdot S^n\}$ と[5] 定義する. これを S に関する語距離という. 特に S が対称な生成系のとき d_S は距離になる.

定義 1.13 (部分集合間の順序関係)**.**
群 G の単位元を含む部分集合族 $\mathcal{P}_e(M) := \{A \subseteq G|e \in A\}$ (ただし e は G の単位元) 上に以下の様な擬順序関係 $\sqsubseteq$ を入れる.

$$A \sqsubseteq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}, A \subseteq B^n$$

この時, この半順序関係から定義される同値関係を $\sim$ と書くことにする.

定理 1.14 (語距離の不変性)**.**
群 G の単位元を含む部分集合 A, B が $A \sqsubseteq B$ を満たすとき, $\mathrm{id_G} : (\mathrm{G}, \mathrm{d_A}) \to (\mathrm{G}, \mathrm{d_B})$ は (拡張準距離に対する) 擬 Lipschitz になる.

[4]定義 3.5 参照
[5]適時 {} は省略する.

例 1.15.

- 有限生成群 G に対し, $A, B \subseteq G$ をそれぞれ G の単位元を含む有限生成系とすると $A \sim B$ となる. よって有限生成群には擬等長を除いて自然な距離が一つ入る.
- *compact* 生成な局所 *compact Hausdorff* 群 G に対し, $A, B \subseteq G$ をそれぞれ G の単位元の相対 *compact* な近傍であるような生成系とすると $A \sim B$ となる. よって *compact* 生成な局所 *compact Hausdorff* 群には擬等長を除いて自然な距離が一つ入る.

2 coarse 幾何の一般論

この説では *coarse* 構造の基本的な事柄につて解説する.

coarse 幾何で考える *coarse* 構造は一様構造の大規模構造におけるある種の対応物である. 位相構造の大規模構造におけるある種の対応物である *bornology* と合わせて以下の様な対応関係にある.

表 1: 構造 (空間)

	小規模	大規模
各点	位相	bornology
一様	一様構造	coarse 構造

表 2: 集合

	小規模	大規模
各点	近傍	有界
一様	一様近縁	coarse 近縁

表 3: 写像

	小規模	大規模
各点	連続	bornological
一様	一様連続	bornologous

表 4: 次元 [6]

	小規模	大規模
各点	被覆次元	不明 [7]
一様	一様次元	漸近次元

2.1 bornology

この項では *bornology* を導入しておく.

bornology は距離空間における有界集合などの性質を抽象化したものである.

[6] 一例を抜粋、各々の対象に他にも様々な次元がある.

[7] 自然な類似で定義することはできる.

定義 2.1 (bornology)**.**
集合 X 上の部分集合族 $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が

$$\bigcup \mathfrak{B} = X \tag{被覆}$$

$$A \cap B \neq \varnothing \text{ を満たす任意の } A, B \in \mathfrak{B} \text{ に対し } A \cup B \in \mathfrak{B} \tag{合併}$$

$$\text{任意の } A \in \mathfrak{B} \text{ と任意の } B \subseteq A \text{ に対し } B \in \mathfrak{B} \tag{部分集合}$$

$$\text{任意の } x, y \in X \text{ に対し } \{x, y\} \in \mathfrak{B} \tag{有限集合}$$

を満たすとき, $(X, \mathfrak{B})$ を X を台集合, $\mathfrak{B}$ を bornology とする bornological space という. この時 $\mathfrak{B}$ の元は $\mathfrak{B}$-有界だという. ここでは,(被覆) と (合併) の条件を満たすものを半 bornology 基, (被覆) と (合併) と (部分集合) の条件を満たすものを半 bornology, (被覆) と (合併) と (有限集合) の条件を満たすものを bornology 基と呼ぶことにする.

命題 2.2.
集合 X 上の部分集合族 $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が *bornology* 基であることと以下の条件をみたすことが同値.

$$\bigcup \mathfrak{B} = X \tag{被覆}$$

$$\text{任意の } A, B \in \mathfrak{B} \text{ に対し } A \cup B \in \mathfrak{B} \tag{合併}$$

注意 2.3.

半 *bornology* $\mathfrak{B}$ が *bornology* であることと, 任意の有限集合が $\mathfrak{B}$-有界 であることが同値.

例 2.4.

- 集合 X の冪集合 $\mathcal{P}(X) := \{A | A \subseteq X\}$ は *bornology.*
- 集合 X 上の一点集合全体 $\mathcal{P}_s(X) := \{\{x\} | x \in X\}$ は半 *bornology* 基.
- 集合 X 上の有限集合全体 $\mathcal{P}_f(X) := \{A \subseteq X | A\text{:finite}\}$ は *bornology.*
- 位相空間 X 上の *compact* 集合全体 $\mathcal{P}_c(X) := \{A \subseteq X | A\text{:compact}\}$ は *bornology* 基.
- 位相空間 X 上の相対 *compact* 集合全体 $\mathcal{P}_c(X) := \{A \subseteq X | A\text{:compact}\}$ は *bornology.*
- 距離空間 (X, d) 上の距離が有界な集合全体 $\mathcal{P}_b(X) := \{A \subseteq X | A\text{:}d\text{-有界}\}$ は *bornology.*
- 距離空間 (X, d) 上の距離が全有界な集合全体 $\mathcal{P}_b(X) := \{A \subseteq X | A\text{:全有界}\}$ は *bornology.*

2.2 coarse 空間

この項では *coars* 構造を導入する.

coars 構造は距離などの大規模構造を抽象化したものである.

定義 2.5 (coarse 空間)**.**

集合 X の直積 $X \times X$ 上の部分集合族 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ が

$$\Delta_X := \{(x,x) | x \in X\} \in \mathcal{E} \tag{対角線}$$

$$任意の\ E, F \in \mathcal{E}\ に対し,\ E \cup F \in \mathcal{E} \tag{合併}$$

$$任意の\ E, F \in \mathcal{E}\ に対し,\ E \circ F := \{(x,z) \in X \times X | \exists y, (x,y) \in E, (y,z) \in F\} \in \mathcal{E} \tag{合成}$$

$$任意の\ E \in \mathcal{E}\ と任意の\ F \subseteq E\ に対し,\ F \in \mathcal{E} \tag{部分集合}$$

$$任意の\ E \in \mathcal{E}\ に対し,\ E^{-1} := \{(y,x) \in X \times X | (x,y) \in E\} \in \mathcal{E} \tag{逆}$$

を満たすとき $(X, \mathcal{E})$ を X を台集合, $\mathcal{E}$ を coarse 構造とした coarse 空間という. この時 $\mathcal{E}$ の元を近縁という.

定義 2.6 (基本事項)**.**

- coarse 空間 X の部分集合 A と近縁 E に対し $E(A) := \{x \in X | \exists a \in A, (x,a) \in E\}$ を A の E-近傍 という. 同様に点 x と近縁 E に対し $E(x) := E(x)$ を x の E-近傍という.
- coarse 空間 $(X, \mathcal{E})$ の部分集合 A について, ある点 x と近縁 E が存在して $A \subseteq E(x)$ となる時, A は $\mathcal{E}$-有界又は単に有界だという.
- coarse 空間 X の部分集合 A について, ある近縁 E が存在して $X = E(A)$ となる時, A は X で coarse 稠密だという.
- 任意の二点 $x, y \in X$ に対し, ある近縁 E が存在して $(x,y) \in E$ となる時, coarse 空間 X は coarse 連結だという.
- coarse 空間 $(X, \mathcal{E})$ の有界集合全体は半 bornology をなすこれをここでは $\mathrm{Bn}(\mathcal{E})$ と書く.

注意 2.7.

- 部分集合 A と近傍 E, F に対し $E \circ F(A) = E(F(A))$. 特に有界集合の E-近傍は再び有界.

- 部分集合 A が有界であることと, $A{\times}A$ が近縁であることは同値.

例 2.8.

- 集合 X に対し, $\mathcal{E}=\mathcal{P}(\Delta_X)$ は X 上の最小の *coarse* 構造である. ここではこれを離散 *coarse* 構造[8] と呼ぶ. $\mathrm{Bn}(\mathcal{E})$ は一点集合全体となる (正確には空集合も含まれる). X が二点以上を含む集合の時はこの空間は *coarse* 連結とはならない.
- 集合 X に対し, $\mathcal{E}=\mathcal{P}(X{\times}X)$ は X 上の最大の *coarse* 構造であり, $\mathrm{Bn}(\mathcal{E})$ は $\mathcal{P}(X)$ と一致する. この空間は全体が有界集合になる空間として特徴づけられる.
- 集合 X に対し, $\mathcal{E}=\{E\subseteq X{\times}X|E\setminus\Delta_X\text{:有限}\}$ は X 上の *coarse* 連結な最小の *coarse* 構造である. ここではこれを離散連結 *coarse* 構造と呼ぶ[9]. $\mathrm{Bn}(\mathcal{E})$ は有限集合全体 $\mathcal{P}_f(X)$ と一致する.
- 距離空間 (X,d) に対し, $\mathcal{E}:=\{E\subseteq X{\times}X|\,\|E\|<\infty\}$ は X 上の *coarse* 構造になる (ただし $\|E\|:=\sup\{d(x,y)|(x,y)\in E\}$). これを距離 d に関する有界 *coarse* 構造という. この時 E-有界性と d-有界性は一致する.
- 距離空間 (X,d) に対し, $\mathcal{E}:=\{E\subseteq X{\times}X|\inf\{\|E\setminus K{\times}K\|\,|K\text{:}compact\}=0\}$ は X 上の *coarse* 構造になる. これを距離 d に関する C_0-*coarse* 構造という. この時 E-有界性と d-有界性は一致する.

命題 2.9.
coarse 空間 $(X,\mathcal{E})$ に対し以下の (1) から (4) の条件は互いに同値.

$$(X,\mathcal{E})\text{ が coarse 連結} \tag{1}$$
$$\text{任意の有限集合が有界} \tag{2}$$
$$\text{任意の有界集合 } A,B\in\mathrm{Bn}(\mathcal{E})\text{ に対し }\mathrm{A{\times}B}\in\mathcal{E} \tag{3}$$
$$\text{有界集合全体 }\mathrm{Bn}(\mathcal{E})\text{ が bornology} \tag{4}$$

空間の直積上部分集合族が与えられたときそこから *coarse* 構造を生成することができる.

定義 2.10 (coarse 構造の生成)**.**
集合 X とその上の *coarse* 構造の族 $(\mathcal{E}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられた時, それらの共通部分 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{E}_\lambda$ は再び X 上の *coarse* 構造となる.
集合 X とその直積 $X{\times}X$ 上の部分集合族 $\mathfrak{A}\subseteq\mathcal{P}(X{\times}X)$ に対し, $\mathrm{CS}(\mathfrak{A}):=\bigcap\{\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(\mathrm{X{\times}X})|\mathcal{E}\text{:}X\text{ 上の } coarse\text{ 構造},\mathfrak{A}\subseteq\mathcal{E}\}$ を $\mathfrak{A}$ から生成される *coarse* 構造という.

[8][Roe] の定義とは異なる.
[9][Roe] ではこちらを discrete coarse structure と呼んでる.

更に, 空間に *bornology* が与えられたとき, それに対し自然な *coarse* 構造がいくつか考えられる.

定義 2.11 (bornology と coarse 構造)**.**
$\mathfrak{B}$ を集合 X 上の *semi-bornology* とする. この時, $\mathrm{CS}_0(\mathfrak{B})$ を $\{B\times B|B\in\mathfrak{B}\}$ から生成される *coarse* 構造とすると, これは $\mathfrak{B}=\mathrm{Bn}(\mathcal{E})$ となるような最小の *coarse* 構造 $\mathcal{E}$ として特徴づけられる.
具体的に $\mathrm{CS}_0(\mathfrak{B})=\{\mathrm{E}|\exists\mathrm{n},\exists\mathrm{B}_0,\cdots,\mathrm{B}_{\mathrm{n}-1}\in\mathfrak{B},\mathrm{E}\subseteq\Delta_{\mathrm{X}}\cup\mathrm{B}_0\times\mathrm{B}_0\cup\cdots\cup\mathrm{B}_{\mathrm{n}-1}\times\mathrm{B}_{\mathrm{n}-1}\}$ と書くこともできる.

$\mathfrak{B}$ を集合 X 上の *bornology* とする. この時, $\mathrm{CS}_{\mathrm{p}}(\mathfrak{B}):=\{\mathrm{E}\subseteq\mathrm{X}{\times}\mathrm{X}|\forall\mathrm{B}\in\mathfrak{B},\ \mathrm{E}(\mathrm{B}),\mathrm{E}^{-1}(\mathrm{B})\in\mathfrak{B}\}$ は *coarse* 構造となる. これは $\mathfrak{B}=\mathrm{Bn}(\mathcal{E})$ となるような最大の *coarse* 構造 $\mathcal{E}$ として特徴づけられる.

例 2.12.

- 離散 *coarse* 構造は一点集合 *(*及び空集合*)* 全体を有界集合全体とするような最小の *coarse* 構造である.
- 離散連結 *coarse* 構造は有限部分集合全体を有界集合全体とするような最小の *coarse* 構造である.

例 2.13.

2.3 写像と同型

この項では *coarse* 幾何における写像について解説する.

定義 2.14 (close)**.**
集合 S から coarse 空間 X への写像 $f:S\to X$ と $g:S\to X$ について, $f\times g(\Delta_S)=\{(f(s),g(s))|s\in S\}$ が近縁になる時, f と g は close であるという. 以下 f と g が close であることを $f\simeq g$ と書く.

定義 2.15 (bornologous)**.**
coarse 空間 X から coarse 空間 Y への写像 $f:X\to Y$ が bornologous(又は coarse 一様) であるとは, X の近縁 E の像 $f\times f(E)=\{(f(a),f(b))|(a,b)\in E\}$ が常に Y の近縁となるときいう.

例 2.16. 距離空間から距離空間への擬 *Lipschitz* 写像は有界 *coarse* 構造に関して *bornologous* である.

coarse 幾何の圏では *coarse* 空間を対象, *bornologous* 写像の *close* による同値類を射とするような圏を考えることになる. この圏では, 単射的 *(monic)* な射が *coarse* 埋め込みとなり全射的 *(epic)* な射は像が *coarse* 稠密になる *bornologous* 写像となり, 同型射は *coarse* 同値写像となる.

定義 2.17 (coarse 埋め込み)**.**
coarse 空間 X から coarse 空間 Y への bornologous 写像 $f : X \to Y$ が coarse 埋め込みとは, Y の近縁 E の引き戻し $(f{\times}f)^{-1}(E) = \{(a,b) \in X{\times}X | f(a,b) \in E\}$ が常に X の近縁となるときいう.

定義 2.18 (coarse 同値)**.**
coarse 空間 X から coarse 空間 Y への bornologous 写像 $f : X \to Y$ が coarse 同値写像とは, Y から X への bornologous 写像 $g : YX$ があって, $g \circ f$ が $\mathrm{id_X}$ と, $f \circ g$ が $\mathrm{id_X}$ とそれぞれ close になるときいう. この時 g を f の coarse 逆写像という.
coarse 空間 X と coarse 空間 Y の間に coarse 同値写像が存在するとき二つの空間は coarse 同値であるという.

例 2.19.

- $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{Z}^n$ は有界 *coarse* 構造に関して自然な埋め込みで *coarse* 同値.

定理 2.20 (同値写像の特徴付け)**.**
bornologous 写像 $f : X \to Y$ について以下が同値.

- f が coarse 同値写像
- f が coarse 埋め込みで $f(X)$ が Y で coarse 稠密.

2.4 空間の構成

この項では *coarse* 空間の基本的な構成方法について解説する.

定義 2.21 (誘導 coarse 構造)**.**
集合 X から coarse 空間 $(Y, \mathcal{E}_Y)$ への写像 $f : X \to Y$ X に対し, $(f{\times}f)^{-1}[\mathcal{E}] := \{F \subseteq X{\times}X | \exists E \in \mathcal{E}_Y,\ F \subseteq (f{\times}f)^{-1}(E)\}$ は X 上の coarse 構造になる. これを f から誘導される coarse 構造という.
これは f を bornologous にするような最大の coarse 構造である.

定義 2.22 (部分 coarse 構造)**.**
coarse 空間 $(X, \mathcal{E}_X)$ の部分集合 A に対し, 部分 coarse 構造 $\mathcal{E}_{|A} := \{E \cap A \times A | E \in \mathcal{E}\}$ を入れた corase 空間 $(A, \mathcal{E}_{|A})$ を部分 corase 空間という.

定義 2.23 (像 coarse 構造)**.**
coarse 空間 $(X, \mathcal{E}_X)$ から Y への写像 $f : X \to Y$ に対し, $f \times f[\mathcal{E}] := \mathrm{CS}(\{\mathrm{f{\times}f(E)|E} \in \mathcal{E}_\mathrm{X}\})$ は Y 上の coarse 構造になる. これを f による像 coarse 構造という.
これは f を bornologous にするような最小の coarse 構造である.

定義 2.24 (直積)**.**
coarse 空間の族 $(X_\lambda, \mathcal{E}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し, その直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に直積 coarse 構造 $\mathcal{E}_{\prod} := \{E \subseteq (\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \times (\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) | \forall \lambda \in \Lambda, p_\lambda \times p_\lambda(E) \in \mathcal{E}_\lambda\}$ を入れた coarse 空間 $(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \mathcal{E}_{\prod})$ を $(X_\lambda, \mathcal{E}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の直積 coarse 空間という.

定義 2.25 (直和)**.**
coarse 空間の族 $(X_\lambda, \mathcal{E}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し, その直和集合 $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に直和 coarse 構造 $\mathcal{E}_{\coprod} := CS(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{E}_\lambda)$ を入れた coarse 空間 $(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \mathcal{E}_{\coprod})$ を $(X_\lambda, \mathcal{E}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の直和 coarse 空間という.

正確にはこの直和は *coarse* 幾何の圏における直和には成っていない.

例 2.26.

- 距離空間の有限直積距離空間の有界 *coarse* 構造は元の空間の *coarse* 構造の直積.

2.5 漸近次元

この項では,*coarse* 幾何における最も基本的な不変量である漸近次元について解説する.
まずは, 漸近次元を定義するために必要な言葉を定義する.

定義 2.27 (集合族)**.**
集合 X 上の部分集合族 $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が $\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{V}, U \subseteq V$ を満たす時 $\mathcal{U}$ は $\mathcal{V}$ の細分であるという.
集合 X 上の部分集合族 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ について, $\mu(\mathcal{U}) := \sup\{\sharp\mathcal{V} | \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}, \bigcap \mathcal{V} \neq \varnothing\}$ を [10] $\mathcal{U}$ の重複度という.
coarse 空間 X 上の部分集合族 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ について, $\Delta_\mathcal{U} := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \times U$ が近縁となる時, $\mathcal{U}$ は一様有界であるという.

[10] $\sharp\mathcal{U}$ は $\mathcal{U}$ の要素の個数, $\bigcap \mathcal{V}$ は $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V$ のこと.

coarse 空間 X 上の部分集合族 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ と近縁 E が,

$$\forall U, V \in \mathcal{U}(U \neq V \to U \times V \cap E = \varnothing)$$

を持たすとき $\mathcal{U}$ は E-非交叉だという.

漸近次元を定義する.

定義 2.28 (漸近次元)**.**
coarse 空間 X と自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathrm{asdim(X)} \leq \mathrm{n}$ とは, 任意の一様有界な部分集合族 $\mathcal{U}$ に対し, $\mu(\mathcal{V}) \leq n+1$ となる一様有界な部分集合族 $\mathcal{V}$ が存在し, $\mathcal{U}$ が $\mathcal{V}$ の細分 [11] となることを言う.
$\mathrm{asdim(X)} = \mathrm{n}$ とは $\mathrm{asdim(X)} \leq \mathrm{n}$ だが $\mathrm{asdim(X)} \leq \mathrm{n} - 1$ でないときに言う. $\mathrm{asdim(X)}$ を X の漸近次元という.

命題 2.29.
coarse 空間 X について以下が同値

- $\mathrm{asdim(X)} \leq \mathrm{n}$
- 任意の近縁 E に対し, ある部分集合族の列 $(\mathcal{U}_i)_{i=0}^{n-1}$ が存在して, 各 $\mathcal{U}_i$ が E-非交叉で $\mathcal{U} := \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{U}_i$ が X の一様有界被覆となる.

漸近次元は *coarse* 同値で不変な次元になっている.

例 2.30.

- 有界集合の漸近次元は *0.*
- 離散 *coarse* 空間の漸近次元は *0.*
- 木 [12] の漸近次元は *1* 以下 *(0* 次元になるのはちょうど全体が有界なとき*).*
- $\mathbb{R}^n$ の漸近次元は n .

漸近次元には以下の様な特徴がある.

定理 2.31 (部分空間の漸近次元)**.** X を coarse 空間, A を部分 coarse 空間としたとき $\mathrm{asdim}(A) \leq \mathrm{asdim}(X)$ が成立.

[11] 細分の関係が被覆次元とは逆
[12] 単連結グラフ

定理 2.32 (合併の漸近次元)**.** X をcoarse空間, A, B を部分coarse空間としたとき $\mathrm{asdim}(A \cup B) = \max\{\mathrm{asdim}(A), \mathrm{asdim}(B)\}$ が成立.

定理 2.33 (直和の漸近次元)**.** coarse空間の族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し, $\mathrm{asdim}(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) = \sup\{\mathrm{asdim}(X_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$ が成立.

定理 2.34 (直積の漸近次元)**.** coarse 空間 X, Y に対し, $\mathrm{asdim}(X \times Y) \leq \mathrm{asdim}(X) + \mathrm{asdim}(X)$ が成立.

3 群上のcoarse幾何

この節では群上の *coarse* 幾何について解説する. 個々の話は群による作用まで容易に一般化できる.

3.1 群構造と両立するcoarse構造

この項では群上の *bornology* と *coarse* 構造に関係について述べる.

定義 3.1 (群構造と共存するbornology)**.**
群 G 上のbornology $\mathfrak{B}$ が

$$\text{任意の } A, B \in \mathfrak{B} \text{ に対し, } A \cdot B \in \mathfrak{B} \tag{積}$$

$$\text{任意の } A \in \mathfrak{B} \text{ に対し, } A^{-1} := \{a^{-1} | a \in A\} \in \mathfrak{B} \tag{逆}$$

を満たすとき, bornology $\mathfrak{B}$ は G の群構造と両立しているという.

定義 3.2 (群構造と共存するcoarse構造)**.**
群 G 上のcoarse構造 $\mathcal{E}$ が

$$\text{任意の } E \in \mathcal{E} \text{ に対し, } G.E := \{(\gamma.x, \gamma.y) | \gamma \in G, (x, y) \in E\} \in \mathcal{E}$$

を満たすとき, coarse構造 $\mathcal{E}$ は G の群構造と両立しているという.

定義 3.3 (群構造とcoarse構造の生成)**.**
群 G 上の部分集合族 $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(G)$ に対し, $\mathrm{CS_G}(\mathfrak{B})$ を $\{B \times B | B \in \mathfrak{B}\}$ を含み群構造と両立する最小のcoarse構造とする. これは $\mathfrak{B}$ が群構造と両立するbornologyの時は $\mathfrak{B} = \mathrm{Bn}(\mathcal{E})$ となる群構造と両立する最小のcoarse構造 $\mathcal{E}$ として特徴づけられる.
この時は具体的に $\mathrm{CS_G}(\mathfrak{B}) = \{\mathrm{E} | \exists \mathrm{B} \in \mathfrak{B}, \mathrm{E} \subseteq \mathrm{G}.(\mathrm{B} \times \mathrm{B})\}$ と書くこともできる.

定理 3.4 (群構造と共存する bornology と coarse 構造)**.** 群 G に対し, 群構造と両立する G 上の bornology 全体を $\mathfrak{BR}_G(G)$, 群構造と両立する G 上の連結な coarse 構造全体を $\mathfrak{CS}_G(G)$ と書くと, $\mathrm{CS_G} : \mathfrak{BR}_\mathrm{G}(\mathrm{G}) \to \mathfrak{CS}_\mathrm{G}(\mathrm{G})$ は全単射となり, 逆写像は Bn(定義 2.6 参照) となる.

このように群上で *bornology* を考えることと *coarse* 構造を考えることは本質的に同じである. 特に位相群には *compact* 集合全体を *bornology* とする自然な *coarse* 構造が入る.

定義 3.5 (位相群)**.** 群 G とその上の位相 τ について, 乗法 $\cdot : G{\times}G \to G$ と逆元を取る操作 $^{-1} : G \to G$ がそれぞれ τ に関し連続なとき, (G,τ) を位相群という.

定義 3.6 (compact 生成)**.** 位相群が compact な生成系を持つとき、その位相群は compact 生成であるという。

定義 3.7 (群 compact-coarse 構造)**.** G を位相群とする時, $\mathcal{E}_G := \{E \subseteq G{\times}G | \langle E\rangle$:相対 compact$\}$(ただし $\langle E\rangle := \{y^{-1}\cdot x | (x,y) \in E\}$) は G 上の coarse 構造となる. ここではこれを群 compact-coarse 構造ということにする.

以下では位相群として局所 *compact* で *Hausdorff* なものだけを考え, *coarse* 構造として群 *compact-coarse* 構造のみを考える.

3.2 位相群の漸近次元

この項では位相群の漸近次元の基本事項について述べる.

定理 3.8 (部分群と漸近次元)**.** G を位相群とする時, $\mathrm{asdim}(G) = \sup\{\mathrm{asdim}(H) | H{:}G$ の compact 生成な閉部分群$\}$ が成立.

命題 3.9 (準同型と boronologous)**.** G, H を位相群 $f : G \to H$ を連続群準同型とすると, f は bornologous.

定理 3.10 (離散群の準同型と漸近次元)**.** G, H を離散位相群 $f : G \to H$ を群準同型とする時, $\mathrm{asdim}(G) \leq \mathrm{asdim}(\mathrm{Im(f)}) + \mathrm{asdim}(\mathrm{Ker(f)})$ が成立.

定理 3.11 (位相群の同型と漸近次元)**.** G, H を位相群 $f : G \to H$ を開連続群準同型とする時, $\mathrm{asdim}(G) \leq (\mathrm{asdim}(\mathrm{Im(f)}) + 1) \cdot (\mathrm{asdim}(\mathrm{Ker(f)}) + 1)$ が成立.

謝辞

最後にこの原稿を校正していただいた, みやや　わぎょーさんに深く感謝申し上げます.

参考文献

[Roe] John Roe, *Lectures on coarse geometry*,University Lecture Series, vol.31, AMS, 2003

[DS] A. Dranishnikov, J. Smith, *SmithAsymptotic dimension of discrete groups*, Fund. Math., 189 (2006), pp.27-34