組合せ論と代数トポロジー

小泉ふゅーりー @koizumi_fifty

1　やや長い前置き

代数トポロジーという分野の歴史を遡ってゆくとき, 私たちは有名な "Euler の多面体公式" に突き当たります. この公式は今日次のように拡張されています.

定理 1.1 (Dehn-Sommerville)**.** 任意の n 次元単体的多面体 P に対して次の関係式が成り立つ.

$$h_i = h_{n-i},\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

ここで $(h_0, \ldots, h_n)$ は P の h-vector を表す.

色々と分からない用語や記号が出てきたかもしれませんが, それはひとまず措きましょう. 重要なのは上の定理において $i = 0$ としたときに得られる次の系です.

系 1.2. 任意の n 次元単体的多面体 P に対して次の関係式が成り立つ.

$$f_0 - f_1 + f_2 - \cdots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}.$$

ここで f_i は P の i 次元の面の枚数を表す.

とくに $n = 3$ としますと, 0 次元の面というのは頂点を, 1 次元の面とは辺を, 2 次元の面はまさに "面" のことですから, よく知られている Euler の公式

$$(\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 2$$

が現れます.

そもそも「n 次元の多面体というのは何者か」という問いがあるかと思いますが, 今回問題にしたいのは, こうした公式に現れる "交代和" のことです. ホモロジーの理論はまさにこの交代和というものにまつわる Emmy Noether らの鋭い洞察から生まれたものだからです (と私は認識していますが, 数学史には疎いので誤りかもしれません).

2　講演の概要

今回の講演の流れは次ページのようになります. 対象としては位相空間についてのごく基礎的な知識 (連続写像やホモトピー, 商位相といったものの定義) のある方を想定しています. 具体例により位相に対する理解を深めてもらいたいという狙いもありますので, 定義は知っているけれどいまいちぴんとこない, という方の参加も歓迎しております.

2.1　導入

表題に “組合せ論” とありますが, それだけ聞いてもぴんと来ない方もおられるでしょうし, またこういったものは人によって様々な意味に使われるものです. まずはこれについて, 私がどういった意味で用いているのかを述べ, さらにトポロジーにおける “組合せ論的対象” のいくつかを簡単にご紹介したいと思います.

2.2　単体複体とホモロジー

トポロジーにおける組合せ論的対象の最たるものであると思われる “単体複体” についてその定義を述べ, 単体複体と見なせる空間の例をいくつか挙げます. さらに単体複体の “ホモロジー群” なる加群を定義し, どうしてこのようなものが考えられることになったのかについて簡単にお話しします. 前置きに書いた内容はここにつながるということですね.

また, 定義だけではよく分からないと思いますので, ホモロジーというものの応用の仕方などについても述べようと思っています (ここは軽く流して,「詳しくは前回の発表資料で！」と逃げる可能性もあります).

2.3　CW 複体

代数トポロジーにおける一つの問題意識として,「二つの空間がホモトピー同値であるかどうかを判定したい」ということがまず挙げられます. 「ホモトピーは知ってるけどホモトピー同値はぴんとこない」という方が結構いらっしゃるようなので, 一応定義を書いておきます.

定義 2.1. 位相空間 X と Y がホモトピー同値であるとは, 連続写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to X$ で

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X\colon X \to X,\ \ f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y\colon Y \to Y$$

なるものが存在することである. ここで $\simeq$ はホモトープであることを表す.

二つの空間がホモトピー同値であることを示すには, 何よりもまずそれらの間に連続な写像を構成する必要があります. CW 複体というのはこの点において非常に便利な空間で, 現在の代数トポロジーにおいて, いってみれば主役のような立ち位置にあるものです.

時間があまりないので有限複体のみを扱うことになると思いますが (というかまともに定義すらしないただのお話になる可能性もありますが), 単体複体に続いてこうした CW 複体についてもご紹介しようと思います.