色々な反例を作って遊ぼう

市民 (相転移 P)

2013-01-08

1　概要

つどいでは実数論，初等的な微分積分学周辺で【色々な反例を作って遊ぼう】という題目で講演する．講演の対象は学部 1-2 年生と非専門家とする．

文献 [1] の紹介を兼ねて，色々な反例を紹介する．数学科レベルの概念に関する反例であっても高校で学ぶレベルで初等的に構成できる例も多い．特に非専門家には「難しい理論」の勉強ばかりが数学との接し方ではないことを伝えたい．非常に良くないことだが，個人的にもこれまであまり具体例に接する勉強をしたことがなかったので，自らの再勉強を含め，数学科学生には（反）例を作る重要さを確認してもらいたい．また，ただ例を挙げるだけではつまらないので何故その例が面白いのかを説明することと合わせ，何か背景にある理論や定理があればそれも適宜紹介したい．

時間的に本番では全部話せないが，今候補に挙げている例をいくつか挙げておく．より良い例が見つかれば例は適宜変更するので，参考程度に考えておいてほしい．文献 [1] にある例に限らず，面白い例を出したい．

1. 至る所不連続だが絶対値を取ると連続になる関数 [1], p22.
2. 「中間値の定理」が成り立つ不連続関数 [3] p158.
3. 連続だが微分可能でない関数：ワイエルシュトラスの関数 [3] p141，高木関数，ブラウン運動.
4. 微分方程式の解だが，必要な回数だけ微分できない関数.
5. 有界閉区間上連続だが一様連続ではない関数 [1] p19.
6. 可微分関数の一様収束と微分の挙動制御.
7. 多変数関数：各変数に対する連続性・微分可能性と多変数関数としての連続性・微分可能性 [1] p115.
8. 多変数関数：複素変数の場合.
9. 距離空間上，非コンパクト集合に対して共通部分がない閉集合で距離が 0 になってしまう 2 つの集合 [1] p130.
10. 連続濃度を持つ長さ 0 の $\mathbb{R}$ 上の集合 [1] p85.
11. $\Omega \in \mathbb{R}^d$ としたとき，異なる p に対する $L^p(\Omega)$ の包含関係が Ω に依存する例 [4] p64.

References

[1] Bernard R. Gelbaum, John M. H. Olmsted, Counterexamples in Analysis, Dover Publications, 2003, http://www.amazon.co.jp/dp/0486428753

[2] 小松彦三郎, 佐藤超函数論入門, http://hdl.handle.net/2433/107215

[3] William Dunham, 微積分名作ギャラリー — ニュートンからルベーグまで, 日本評論社, http://www.amazon.co.jp/dp/4535784485

[4] D. Williams, マルチンゲールによる確率論, 培風館, http://www.amazon.co.jp/dp/4563008850/