平成 25 年 1 月 17 日
@Morphy_x

位相入門

誰もが位相を最初に学ぶときは一度は壁にぶつかるであろう．それはきっと，イメージできない，記号が並んでいて何がどう表されているのか分からない，ということが多いのではないかと思う．ここではあまり知られていないであろうちょっと面白い例を挙げるつもりである．なので位相について理解十分の方は聞いても仕方がないかもしれない．
さて，位相の公理というのは不思議なもので，最初に見たときは頭が混乱しそうになって，何を言ってるのかサッパリわからなかった．しかし，少しの説明と想像することによって，今では当たり前のように位相を使っている．時間とは面白い魔法である．

Definition.位相の定義のための準備 (1)

X:Set,$\mathscr{B} \subset \wp(X)$ として，記号を定義する．
$\bigcap \mathscr{B} := \bigcap_{U \in \mathscr{B}} U$
$\bigcup \mathscr{B} := \bigcup_{U \in \mathscr{B}} U$
この二つについては，$\mathscr{B}$ のすべての元の共通部分と和集合を取ることを表している．
また，以下の記号は発表中に使用するかもしれないので定義しておく．
$\langle \mathscr{B} \rangle_1 := \{U \in \wp(X) \mid \exists \mathscr{U} \subset \mathscr{B} : \sharp \mathscr{U} < \infty \Rightarrow U = \bigcap \mathscr{U}\}$
$\langle \mathscr{B} \rangle_2 := \{U \in \wp(X) \mid \exists \mathscr{U} \subset \mathscr{B} : U = \bigcup \mathscr{U}\}$
$\langle \mathscr{B} \rangle := \langle \langle \mathscr{B} \rangle_1 \rangle_2$

Definition.位相 (2)

$X : Set, \mathscr{O} \subset \wp(X)$
$\mathscr{O}$ が位相 (開集合系とも言う) である
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ [条件 $O1$]$\forall \mathscr{U} \subset \mathscr{O} : \bigcup \mathscr{U} \in \mathscr{O}$
[条件 $O2$]$\forall \mathscr{U} \subset \mathscr{O} : \sharp \mathscr{U} < \infty \Rightarrow \bigcap \mathscr{U} \in \mathscr{O}$
また，$U \subset X$ が開集合であるとは，$U \in \mathscr{O}$ とする．
X における位相全体の集合 $\mathscr{T}(X) := \{\mathscr{O} \in \wp(\wp(X)) \mid \mathscr{O}$ は X の位相 $\}$

Remark. どんな集合 X についても，位相の構造は必ず存在する．
また位相 $\mathscr{O}$ は必ず$\emptyset, X \in \mathscr{O}$ を満たす．

Definition.閉集合 (3)

閉集合系を $\mathscr{F} := \{C \in \wp(\wp(X)) \mid C^c \in \mathscr{O}\}$
(補集合が開集合) と定義し，閉集合を $\mathscr{F}$ の元であるとする．

ここから直和分割と併せて考えられる位相の例を挙げる．

Definition.同値位相 (仮) (4)

$\mathscr{O}$ が直和分割から和生成される位相 (同値位相) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(\exists \mathscr{B} \subset \mathscr{O} : \underline{\mathscr{B} \text{ は } X \text{ の直和分割}} \wedge \underline{< \mathscr{B} >_2 = \mathscr{O}})$

この定義は簡単に言えばある直和分割が存在してそれによって和集合のみで生成されるということであり，また直和分割を作ることと同値関係を作ることが結果として同値なので，この定義に関して言える命題は全ての同値関係と位相の組み合わせに言えることになる．
なお，この直和分割から和生成される位相に存在する $\mathscr{B}$ のことを，ここでは直和基底と呼ぶことにする．また，

この位相を改めて同値位相と仮に呼ぶことにしている．
ただし，一般にこの定義は使われることなく，ただの一例としてここでは扱っている．ここから導かれる命題などを発表する予定です.

※なお，聴講者のレベルが高そうであると感じた場合，BGN 微分の発表へと変更することがあります.

参考文献

[1] 斎藤毅『集合・位相』

[2] 位相講義録