楕円型作用素のパラメトリックス

福本佳泰*

京都大学，2013 年 3 月

本講演では,
(i) まず以下の [定義など] に書いてある内容を，ある程度補いながら解説し，
(ii) 次に parametrix を用いることで，楕円型作用素の性質をいくつか解説する
つもりである．出来れば index thorem の証明への応用も話したいところだが，そんな時間は明らかに無いと思われるため，期待しないで欲しい．

また形式的な部分のみを話すことにし，証明はほとんど与えないつもりである．なお，講演者の本職は微分幾何学であって，擬微分作用素のプロというわけではない．従って挙げている参考文献も，index theorem 関係のものである．実際，講演者は Riemann 多様体上の楕円型作用素に対して応用するために，擬微分作用素の parametrix を勉強した．

定義など

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} A^\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \tag{0.1}$$

を，$\mathbb{R}^n$ 上の Schwartz 函数に作用する m 階の微分作用素とする．但し $\alpha \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ は multi index である．

このとき $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ を ξ に置き換えた，ξ に関する多項式

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} A^\alpha(x) \xi^\alpha \tag{0.2}$$

を，<u>P の (total) symbol</u> という．

ここで Fourier 変換 $u \mapsto \hat{u} = \mathcal{F}[u]$ を用いて，u や Pu を書き換える．

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int e^{x\cdot\xi} \hat{u}(\xi) \mathrm{d}\xi \tag{0.3}$$

$$Pu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int e^{x\cdot\xi} p(x,\xi) \hat{u}(\xi) \mathrm{d}\xi \tag{0.4}$$

上の式 (0.4) は $p(x,\xi)$ が ξ の多項式でなくても意味を持つ．この式によって，定義される作用素を <u>擬微分作用素</u> と呼ぶ．（p としてどのような函数を考えるかは，講演中に説明する予定である.）

*fukumoto @ math. kyoto-u. ac. jp

イメージで言うと，p の多項式としての次数が大きいほど，$P = p(x, (\frac{\partial}{\partial x}))$ は滑らかさを下げる作用素である．この次数としては負の値も考えるが，その場合は滑らかさを上げる作用素になる．詳しい事は，Sobolev 空間の言葉を用いて説明できる．

$p(x, \xi)$ の最高次が 0 にるのが $\xi = 0$ の場合に限るとき，$P = p(x, (\frac{\partial}{\partial x}))$ は elliptic（楕円型）であるという．（作用される函数としてベクトル値を考えることもある．その場合 $p(x, \xi)$ は行列に値を持つが，$\xi = 0$ の場合を除いて $p(x, \xi)$ の最高次が可逆にるとき，P は elliptic（楕円型）であるという.）

楕円型作用素の典型的な例は，ラプラス作用素

$$\triangle = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2 \tag{0.5}$$

である.（ラプラス作用素 $\triangle$ の symbol は $p_{\triangle}(x, \xi) = -|\xi|^2$ である．確かに $\xi = 0$ の場合を除いて 0 にはならない.）

P が elliptic（楕円型）のとき，P 自身は可逆な作用素とは限らないが，”smoothing operater の差を除けば” 可逆になるということが知られている．この逆作用素を与える擬微分作用素 Q を，P の parametrix という.

参考文献

[La-Mi] H. Blaine Lawson, Jr. and Marie-Louise Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton, N.J. : Princeton University Press (1989), Chapter III Section 3 .