対称群からの表現論入門

eno

この講演ではだいたい 2 回生 (終了) 頃の, 代数学の講義で”群論”に触れたことのある人くらいが対象 (のつもり) です.

そもそも表現論とは何か? (ものすごく大雑把にいえば)「群を行列の形で”具体的に書く”とどうなるか?」という問題を考える分野です. 代数学の講義を受けたことのある方の中には, 「群論とか環論とか, すごく抽象的だ. 演算の部分しかみていない」と思ったことがある方もいるかもしれません (僕は思いました). それでは抽象的だ, というので「具体的に書いて考えたい!」と思うわけです. そもそも”群”とは”対称性”を記述するところから生まれているのですから, ある意味原点に立ち返っているとも言えるでしょう.

数学として定式化すれば, 次のようなものになります:

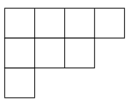
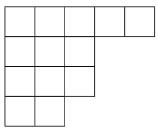
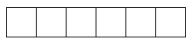
Definition G を群とする. ベクトル空間 V 上への G の表現 π とは, 群の準同型

$$\pi : G \to GL(V)$$

のことである. ここで $GL(V)$ は V から V への全単射線形写像全体からなる群.

群というのはその表現論によって完全に理解できるのだ, というのが表現論の基本的な思想です. 実際, 群とその表現論の間にはある種の「双対性」が存在します.

なにやら大げさになってきましたが, 今回はあまりこのような理論の部分の話をせず, 具体的な群を取り上げてその表現論とその組合せ論的な側面について解説します. 主に扱うのは対称群 $S(n)(n = 1, 2, \cdots)$ です. これは n 個の集合の置換 ($\{1, 2, \cdots, n\}$ を考えれば, ”数字を入れ替えるという操作) 全体です. この群の表現論の表現論は”ヤング図形”という図形で完全に記述されます. ヤング図形とは次のような形で「箱を並べたもの」です:

 とか,  とか, とか...

講演の最初の 1 時間くらいはヤング図形によってこの $S(n)$ の表現論が実際にどのように述べられるのか, ということを話します. ここはほとんど線形代数の議論とか, 対称関数の議論とかでできます. 学部 1 回生くらいまでに学ぶ道具で「こんな美しい世界を見ることができるのか!」と感動していただけたらとても嬉しい (そうできるよう頑張ります).

残り 30 分では, $S(\infty)$ という群の表現論に関するトピックについて少し紹介します. 単純に $n = \infty$ としただけ (?) ですが, n が有限の時とは全く様子が異なります. ”ノンコンパクト”の世界を知っている方は, 「こんな群まともに調べられっこない!」と思うかもしれません. しかし, 多くの困難を乗り越えた先には, 実に奥の深い世界が広がっています. 今回の講演の後半では, そのような世界の一端を紹介しようと思います.

参考文献

[1] 岡田聡一, 古典群の表現論と組合せ論, 下. 培風館, 2006

[2] S. V. Kerov, *Asymptotic representation theory of the symmetric group and its applications in analysis*, 201 pp. Providence, RI: Am. Math. Soc. 2003