命題論理における演繹定理の証明

@YuishiYumeiji

December 27, 2012

概要

演繹定理は, “仮定の列 Γ, α から β が推論できる” ならば “仮定の列 Γ から $\alpha \supset \beta$ が推論できる” という, Hilbert 流の体系に於けるメタ定理である. 記号を用いて表せば,

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \implies \Gamma \vdash \alpha \supset \beta$$

という主張に等しい. この逆 (帰納定理と呼ばれる) の証明は易しいが, 演繹定理は自明ではない.

演繹定理の証明は推論図の長さに関する帰納法によって示される. 本講演では計算と論理を繋ぐ Curry-Howard 同型対応を用いた少し遠回りな証明を与える. ここで与える証明は直観主義命題論理の含意断片 (BCKW 論理) に対するものであるが, 簡単な修正で BCKW 論理より強い論理 (すなわち古典命題論理や直観主義命題論理) にも適用できる.

証明に用いるコンビネータ論理とラムダ計算は, それだけでも豊かな理論を形成するが, 本講演では計算と論理の対応, 特に演繹定理に絞って紹介する. ここでは扱えないが, cut 除去定理にも計算の世界における面白い意味を持っているので, 是非考えてみて欲しい.

証明の概略

まず計算の形式化としてコンビネータ論理の体系 CLw を導入する. 次に項に対する “型付け” の体系を導入し, 型付けの体系が Hilbert 流の命題論理の体系と同型であること (Curry-Howard 同型対応) を確認する. 次にコンビネータ論理がラムダ計算と呼ばれる体系と同等であることを示し, 最後に系として演繹定理を証明する.

予備知識など

本講演は証明論の基礎的な知識 (Hilbert 流または自然演繹の命題論理の推論図が読めること) を仮定する. 含意を表わす記号は “$\supset$” を用い, 右結合と約束する. 記号としての (メタな意味での) 同値性を表す記号として $\equiv$ を用いる.