古典的ミラー対称性入門

宇宙賢者

この講演の目的は, ミラー対称性という話題を通して数理物理に興味を持ってもらうことである. ミラー対称性とは, 端的に言えば A 模型と B 模型と呼ばれる 2 つの物理理論の等価性から予想される様々な現象のことである. これは 1980 年代後半に物理における超弦理論 (N=2 超共形場理論) の研究の中で認識されてきた現象であり, その定式化を通して多くの非自明な予想が数学にもたらされることとなった. 特にこの講演では古典的ミラー対称性と呼ばれる, 正則曲線の数え上げ (Gromov-Witten 不変量) から定まる A 模型の Frobenius 構造と特異点理論から定まる B 模型の Frobenius 構造の間の同型について部分的に触れる予定である. 内容は以下の (1)〜(4) に沿って話をする予定である.

(1) ミラー対称性とは？
(2) 2 次元の TQFT と Frobenius 代数について
(3) Gromov-Witten 不変量と小量子コホモロジー環について
(4) 複素射影空間の古典的ミラー対称性入門

(1) では, ミラー対称性とはどのようなものか大雑把に紹介をする予定である. ここでは様々なトピックを紹介するが, 数学的な定義定式化については原則説明はしないので, そこは気にせずにミラー対称性の雰囲気をつかんでもらいたいと思う.

(2) では, 2 次元の TQFT として Frobenius 代数を導入し, その具体例として複素射影空間のコホモロジー環や Jacobi 環を紹介する. Jacobi 環はミラー対称性における B 模型に対応するものである. 予備知識としては, 圏論や環論の初歩を知っていることが望ましい.

(3) では, Gromov-Witten 不変量について簡単な紹介を行い, それを通して A 模型に対応する小量子コホモロジー環の導入をする. また, いくつか基本的な性質を説明し, 複素射影空間の場合に小量子コホモロジー環の具体形を調べる. 予備知識としては, 多様体のホモロジーやコホモロジーを知っていることが望ましいが, 知らない人向けに簡単な説明はする予定である.

(4) では, 古典的ミラー対称性の数学的な定式化について話す予定である. また, (3) までの話を使い, 複素射影空間の場合に古典的ミラー対称性の一部に触れることで, ミラー対称性入門としようと思う. 場合によっては接続の話をするので, 微分幾何の基礎知識が必要になるかもしれないが, ここについては深くは立ち入らないつもりである.

このつどいの趣旨として, 様々なレベルの数学好きの方々が数学の様々なトピックに触れて楽しむというものがあると思っているので, あまり予備知識のない方にも理解できるようになるべく平易に解説をしたいと思っています. いくつかの定義や話題について数学的詳細や参考文献について知りたい方は, 適当に私を捕まえて遠慮なく質問してください. よろしくお願いします.