数論幾何への誘い

みやや わぎょー @nolimbre

数論幾何は，代数幾何・位相幾何・函数論など様々な分野における手法やアイディアを投入して，整数の性質を調べる学問です．しかし，これら一見整数とは関係なさそうな分野の考え方が整数のような離散的な対象とどのように関係するのか，想像しにくいという方は少なくないと思います．そこでこの講演では，数論幾何に触れたことのない方を対象として，数論幾何におけるこうした手法の例をおおざっぱに紹介し，「数論幾何への誘い」としたいと思っています．

題材には，数論幾何の萌芽である「Weil 予想*1」をとります．Weil 予想は，大きくみれば，「多項式の根がどのようにふるまうか？」という問題の 1 つに位置づけることができます．たとえば「X^2-2 という多項式は（有理数の）根をもつだろうか？」とか，「複素数係数の多項式の根の個数と次数の関係はなにか？」，「$X^4+Y^4=Z^4$ という方程式に $(0,0,0)$ 以外の有理数解はあるか？」とかいった問題の仲間です．Weil 予想の場合は，整数係数の多項式は「素数 p を法として考えるとき」いくつ根をもつか，もっと一般に，有限体 $\mathbb{F}_{p^r}$ にいくつ根をもつか*2という問題について，驚くべき主張を与えています．本講演では，この Weil 予想について説明した後，位相幾何に由来するアイディア（エタールコホモロジー）や函数論的な考え方（p 進解析）が，この予想にアタックするのにどのように活かされるのかをお話ししようと思います．前述のように，本講演の目的は数論的な問題に他分野の考え方を活かすという例を紹介することですが，そのアイディアや手法を説明することに重点をおくため，数学的に厳密な説明はあまりしません．たとえば，エタールコホモロジーをきちんと定義したり，p 進解析を用いた計算を頑張って追ったりはしませんので，その点はご了解ください．

この講演の対象は，体論（体の拡大や有限体について），代数的トポロジーの基礎（被覆と基本群，特異コホモロジー），函数論の基礎*3を学んだことのある人で，数学科生で言えば新 3, 4 年生くらいを想定しています．また，数論幾何はもちろん，代数幾何や代数的整数論についても予備知識は仮定しません．

最後に，本講演に関連する文献のうち，数論幾何への入門となりうる，あるいは入門して遠からず読めるものを 4 つ挙げます（いずれも代数幾何に関する基本的な知識が，各々のレベルで仮定されています）．

[D] B. Dwork, “*On the rationality of zeta function of an algebraic variety*,” Amer. Journ. Math., **82** (3) (1960), 631–648.

[三] 三枝洋一，「エタールコホモロジーと ℓ 進表現」，第 17 回 (2009 年度) 整数論サマースクール報告集.

[M] P. Monsky, “*p-adic analysis and zeta functions*,” Lectures in Mathematics, Department of Mathematics, Kyoto University, **4**, Kinokuniya BookStore Co., Ltd., Tokyo 1970.

[W] A. Weil, “*Numbers of solutions of equations in finite fields*,” Bull. Amer. Math. Soc., **55** (1949), 497–508.

[M] は Weil 予想と p 進解析に関する，[三] はエタールコホモロジーに関する，とてもよい入門です．Weil 予想が提出された論文が [W] であり，それを p 進解析を用いて部分的に解決したのが [D] で，これらも各々読みやすいと思います．

---

*1 「予想」と名前がついていますが，既に肯定的に解決しています．

*2 実はこの状況設定は，本来の Weil 予想よりかなり特殊な設定です．多項式ははじめから $\mathbb{F}_{p^r}$ 係数のものを考えてよいし，複数個の多項式について共通根を考えてもよいです（もっと一般化できます）．講演ではこの部分はもっときちんと説明します．

*3 代数的トポロジーと函数論については，どちらか一方を知っていれば 3 分の 2 くらいの時間は楽しめると思います．